

Садржај

1	Апсолутна геометрија	3
1.1	Уводни појмови	3
1.2	Троугао	12

Део 1

Апсолутна геометрија

1.1 Уводни појмови

Дефиниција 1.1.1 Геометријски лик ω је конвексан ако за произвољне две тачке A и B лика ω цела дуж AB припада лику ω .

Дефиниција 1.1.2 Геометријски лик ω је ограничен ако постоји кружна површ која садржи све тачке тог лика.

Задатак 1.1. Ако сва темена неке троугаоне површи $\triangle ABC$ припадају конвексном лику ω , тада све тачке троугаоне површи $\triangle ABC$ припадају лику ω . Доказати.

Решење: Уочимо произвољну тачку M троугаоне површи $\triangle ABC$. Довољно је показати да $M \in \omega$.

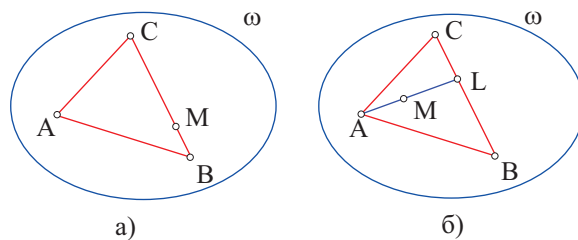
Разликујемо два случаја:

- 1) Тачка M припада некој од страница AB , BC или AC троугаоне површи,
- 2) Тачка M не припада ни једној од страница AB , BC и AC троугаоне површи.

Размотримо понаособ сваку од ове две могућности:

(i) Нека тачка $M \in BC$ (Слика 1.1.а)). Важи $B, C \in \omega$ и ω је конвексан лик, одакле следи $BC \subset \omega$ а одавде $M \in \omega$. Аналогно се разматрају и случајеви када $M \in AC$ и $M \in AB$

(ii) Нека је M унутрашња тачка троугаоне површи $\triangle ABC$ (Слика 1.1.б)). Права AM сече страницу BC у некој тачки L . Тачка L припада



Слика 1.1.

дужи BC , па због конвексности припада и лику ω . Сада, $A, L \in \omega$, одакле према доказаном делу задатка (i) следи $AL \subset \omega$, а како је још $M \in AL$ следи $M \in \omega$.

Дакле, $\Delta ABC \subset \omega$, тј. све тачке троугаоне површи ΔABC припадају лику ω . $\square$

Дефиниција 1.1.3 *Прост полигон је онај код кога само суседне стране имају заједничких тачака.*

Дефиниција 1.1.4 *Проста полигонална површ је она површ која има своју унутрашњу површ и руб јој је прост полигон.*

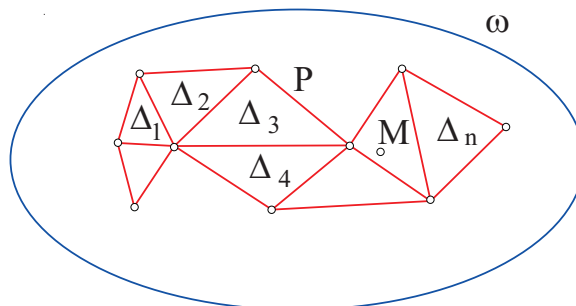
Теорема 1.1. *Проста полигонална површ се може разложити на извесан број троуглова помоћу извесног броја унутрашњих дијагонала.*

Задатак 1.2. *Ако сва темена неке неопходно конвексне, просте, равне полигоналне површи P припадају конвексном лику ω , доказати да цела полигонална површ P припада лику ω .*

Решење: Нека је P проста полигонална површ таква да сва њена темена припадају конвексној површи ω (Слика 1.2). Површ P се може представити у облику уније троугаоних површи Δ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (Теорема 1.1.), тј.

$$P = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i.$$

Нека је M произвољна тачка површи P . Тада постоји троугаона површ Δ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ таква да $M \in \Delta_i$, $\Delta_i \subset \omega$ на основу задатка 1.1., одакле следи $M \in \omega$. Дакле, због произвољности тачке M следи $P \subset \omega$, тј. цела полигонална површ P припада лику ω . $\square$



Слика 1.2.

Задатак 1.3. Пресек n конвексних ликова је конвексан лик. Доказати.

Решење: Нека су $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ конвексни ликови тј. $\omega = \bigcap_{i=1}^n \omega_i$. Покажемо да је ω конвексан.

Нека су тачке $A, B \in \omega$. Како тачке A и B припадају пресеку ω , то тачке A и B припадају сваком од n конвексних ликова ω_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Следи да дуж AB припада сваком од n конвексних ликова ω_i по дефиницији. Како дуж AB припада сваком од n конвексних ликова, онда AB припада и пресеку ω . Следи, ω је конвексан лик. $\square$

Задатак 1.4. Полураван је конвексан лик. Доказати.

Задатак 1.5. Свака троугаона површ је конвексна. Доказати.

Задатак 1.6. Доказати да је свака кружна површ конвексна.

Решење: Свака кружна површ се може представити као скуп тачака $K(O, r) = \{X | OX \leq r\}$. Требамо доказати да за било које две тачке A и B које припадају кружној површи K , дуж AB припада K .

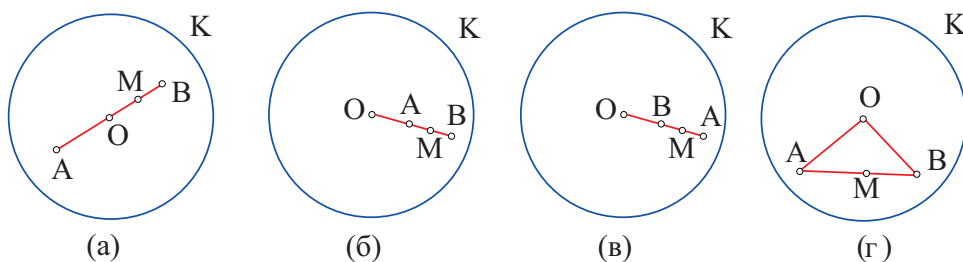
Разликујемо два случаја:

(i) тачке A, B, O су колинеарне и (ii) тачке A, B, O нису колинеарне.

(i) Ако су тачке A, B, O колинеарне тада (Слика 1.3 (а), (б)) важи један од распореда тачака

(а) $B(A, O, B)$, (б) $B(O, A, B)$ или (в) $B(O, B, A)$.

(а) Нека је $B(A, O, B)$. Тачке A и B су тачке кружне површи K па је $OA \leq r$ и $OB \leq r$. Нека је M произвољна тачка дужи AB . Ако је



Слика 1.3.

$M \equiv O$ онда $M \in K$. Ако важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, O, B)$ онда треба доказати да за сваку тачку M дужи AB , M припада кружној површи. Ако се M не поклапа са O , онда може важити један од распореда тачака $\mathcal{B}(A, M, O)$ или $\mathcal{B}(O, M, B)$. Ако важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, M, O)$, онда је $OM < OA \leq r$, одакле следи да $M \in K$. Ако важи распоред тачака $\mathcal{B}(O, M, B)$, онда $OM < OB \leq r$, одакле следи да $M \in K$. Како је M произвољна тачка дужи AB следи $AB \subset K$.

(б) Ако је $\mathcal{B}(O, A, B)$ и $M \in AB$, тада је $\mathcal{B}(O, A, M, B)$, па је $OM < OB$ и како је још $OB \leq r$ то $M \in K$.

(в) Ако је $\mathcal{B}(O, B, A)$ и $M \in AB$, тада је $\mathcal{B}(O, B, M, A)$, па је $OM < OA$ и како је још $OA \leq r$ то $M \in K$.

(ii) Ако тачке A, B, O нису колинеарне, тада уочимо троугао $\triangle ABO$ и тачку M на страници AB (Слика 1.3 (г)). Тада је $OM < \max\{OA, OB\} \leq r$, па следи да и у овом случају $M \in K$. $\square$

Задатак 1.7. Ако је дат скуп $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ од n дужи неке праве l , од којих сваке две имају бар једну заједничку тачку, доказати да свих n дужи тог скупа има бар једну заједничку тачку.

Решење: Применићемо принцип математичке индукције.

1) За $n = 2$ тврђење важи тривијално, по претпоставци задатка.

2) Нека је $n = 3$. Означимо са a_1, a_2, a_3 поменуте дужи а са S_1, S_2, S_3 тачке такве да је

$$S_1 \in a_2 \cap a_3, \quad S_2 \in a_1 \cap a_3, \quad S_3 \in a_1 \cap a_2.$$

Тачке S_1, S_2, S_3 су колинеарне па могу наступити следећи случајеви:

(а) Две од тачака S_1 и S_2 се поклапају. Не умањујући општост, претпоставимо да је $S_1 \equiv S_2 \equiv S$. Значи

$$S \equiv S_1 \in a_2 \cap a_3, \quad S \equiv S_2 \in a_1 \cap a_3$$

одакле следи да $S \in a_1 \cap a_2 \cap a_3$.

(б) Тачке S_1, S_2, S_3 се не поклапају. Због колинеарности важи један од следећих распореда: $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$, $\mathcal{B}(S_2, S_1, S_3)$, $\mathcal{B}(S_1, S_3, S_2)$.

Не умањујући општост, претпоставимо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$. Тада $S_2 \in S_1 S_3$. Даље, по претпоставци је $S_1 \in a_2 \cap a_3$, $S_3 \in a_1 \cap a_2$ одакле следи $S_1, S_3 \in a_2$, па је $S_1 S_3 \subset a_2$, јер је дуж конвексан лик. Сада имамо: $S_1 S_3 \subset a_2$ и $S_2 \in S_1 S_3$ па је $S_2 \in a_2$, како је још $S_2 \in a_1 \cap a_3$ следи да $S_2 \in a_1 \cap a_2 \cap a_3$, тј.

$$\bigcap_{i=1}^3 a_i \neq \emptyset.$$

3) Нека тврђење важи за $n = k$. Докажимо да важи за $n = k + 1$.

Нека је $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ скуп дужи неке праве l од којих сваке две имају бар једну заједничку тачку и нека је

$$\bigcap_{i=1}^k a_i \neq \emptyset.$$

Посматрајмо скуп дужи $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ праве l од којих сваке две имају бар једну заједничку тачку. Докажимо да је тада

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} a_i \neq \emptyset.$$

Означимо са $b = a_k \cap a_{k+1} \neq \emptyset$. Посматрајмо скуп од k дужи

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b\}. \quad (1.1)$$

Све дужи скупа (1.1) припадају истој правој. Покажимо да сваке две од њих имају непразан пресек. Како је

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\},$$

било које две дужи из овог скупа од $k+1$ дужи имају непразан пресек, то и било које две дужи из подскупа од $k-1$ дужи имају непразан пресек. Покажимо да је $a_j \cap b \neq \emptyset$ за $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Имамо да је $a_j \cap b = a_j \cap a_k \cap a_{k+1}$ за $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Како је $\{a_j, a_k, a_{k+1}\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ за $j \in \{1, \dots, k-1\}$ то и за скуп $\{a_j, a_k, a_{k+1}\}$ важи да сваке две дужи имају непразан пресек и све су на истој правој па на основу доказаног

дела тврђења за $n = 3$ следи $a_j \cap a_k \cap a_{k+1} \neq \emptyset$ за $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Дакле, показали смо да је $a_j \cap b \neq \emptyset$ за $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Значи, за скуп (1.1) испуњени су сви услови задатка, тј. све дужи овог скупа припадају истој правој и било које две имају непразан пресек, и како се скуп (1.1) састоји од k елемената то се може применити индукцијска хипотеза. Значи биће

$$\bigcap_{i=1}^{k-1} a_i \cap b \neq \emptyset \quad \text{тј.} \quad \bigcap_{i=1}^{k-1} a_i \cap a_k \cap a_{k+1} \neq \emptyset,$$

одакле следи да је

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} a_i \neq \emptyset,$$

што је требало показати. $\square$

Напомена: Уколико је $a_k \cap a_{k+1}$ тачка, посматрамо је као дуж дужине нула, тада се по претпоставци та тачка налази у свим дужима скупа $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$, па и у њиховом пресеку.

Задатак 1.8. *Ако су дате четири конвексне површи једне равни, од којих сваке три имају бар по једну заједничку тачку, доказати да све четири имају бар једну заједничку тачку.*

Решење: Нека су $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ дате конвексне површи, и нека су S_1, S_2, S_3, S_4 тачке које по претпоставци постоје и за које важи:

$$S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4, \quad S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4, \quad S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4, \quad S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3.$$

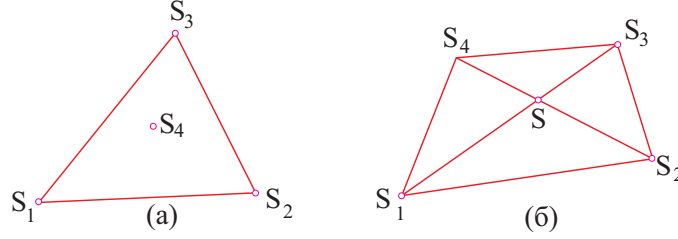
Покажимо да постоји тачка S таква да је $S \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$. С обзиром да све површи $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ припадају једној равни то су тачке S_1, S_2, S_3, S_4 компланарне. Размотримо све њихове могуће положаје.

(i) Бар две тачке се поклапају. Нека је на пример $S_1 \equiv S_2 = S$. Тада је $S \equiv S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S \equiv S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, одакле следи $S \equiv S_1 \equiv S_2 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$.

(ii) Никоје две тачке се не поклапају, али су бар три колинеарне. Нека су на пример тачке S_1, S_2, S_3 колинеарне. Тада су могући следећи распореди: $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$, $\mathcal{B}(S_1, S_3, S_2)$, $\mathcal{B}(S_2, S_1, S_3)$. Без ограничења општости можемо претпоставити да важи $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$, и нека је $S_2 \equiv S$. Тада имамо $S \equiv S_2 \in S_1 S_3$ и $S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4$, одакле

следи да $S_1, S_3 \in \omega_2$, тј. $S_1S_3 \subset \omega_2$. Како је $S \in S_1S_3$ и $S_1S_3 \subset \omega_2$, следи $S \in \omega_2$. С обзиром на то да је $S \equiv S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$ следи $S \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$.

(iii) Никоје три тачке нису колинеарне и три образују троугао коме припада четврта тачка (Слика 1.4 (а)). Без ограничења општости претпоставимо да је S_4 унутрашња тачка троугаоне површи $S_1S_2S_3$.



Слика 1.4.

Како $S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4$ следи $S_1, S_2, S_3 \in \omega_4$, где је ω_4 конвексан лик. Како $S_4 \in \Delta S_1S_2S_3$ и $\Delta S_1S_2S_3 \subset \omega_4$ онда према Задатку 1.1. да је $S_4 \in \omega_4$ и како је још $S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$, имамо $S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$.

(iv) Не важи (i) и (ii) и не постоји троугао са унутрашњом тачком. Посматрајмо конвексан четвороугао $S_1S_2S_3S_4$ и нека је $S = S_1S_3 \cap S_2S_4$. Тада је S унутрашња тачка дужи S_1S_3 и S_2S_4 , па важи распоред тачака $\mathcal{B}(S_1, S, S_3)$ и $\mathcal{B}(S_2, S, S_4)$ (Слика 1.4 (б)). Дакле, $S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$ и $S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4$ одакле следи да је $S_1S_3 \subset \omega_2 \cap \omega_4$. Како је $S \in S_1S_3$, добијамо

$$S \in \omega_2 \cap \omega_4. \quad (1.2)$$

Даље, $S \in S_2S_4$, $S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$ и $S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$ одакле следи да $S_2S_4 \subset \omega_1 \cap \omega_3$. Како је $S \in S_2S_4$, имамо

$$S \in \omega_1 \cap \omega_3. \quad (1.3)$$

Из (1.2) и (1.3) следи да је $S \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, тј.

$$\bigcap_{i=1}^4 \omega_i \neq \emptyset,$$

а то је и требало доказати. $\square$

Задатак 1.9. (Хелијева теорема) Ако су $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, $n \geq 4$ конвексни ликови једне равни, такви да свака три од њих имају бар једну заједничку тачку, доказати да сви поменути ликови имају бар једну заједничку тачку.

Решење: Доказ изводимо индукцијом по n .

- (1) За $n = 4$ тврђење је задовољено на основу Задатка 1.8.
- (2) Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$$\bigcap_{i=1}^k \omega_i \neq \emptyset.$$

- (3) Докажимо да тврђење важи за $n = k + 1$. Означимо са

$$\omega = \omega_k \cap \omega_{k+1}.$$

По претпоставци је $\omega \neq \emptyset$. Из скупа $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}\}$ добили смо скуп

$$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}, \omega\}. \quad (1.4)$$

Показаћемо да свака три lika из овог скупа имају непразан пресек. Како је $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}\} \subset \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}\}$, то свака три lika од $k-1$ ликова скупа $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}\}$ имају непразан пресек. Нека су $\omega_i, \omega_j \in \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}\}$ за $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, $i \neq j$ произвољни елементи. Тада је на основу задатка 1.8.

$$\omega_i \cap \omega_j \cap \omega = \omega_i \cap \omega_j \cap \omega_k \cap \omega_{k+1} \neq \emptyset \quad \text{за} \quad i, j \in \{1, k-1\}, \quad i \neq j.$$

Како су задовољени сви услови задатка за скуп (1.4), то на основу индукцијске хипотезе важи:

$$\bigcap_{i=1}^{k-1} \omega_i \cap \omega \neq \emptyset, \quad \text{тј.} \quad \bigcap_{i=1}^{k-1} \omega_i \cap \omega_k \cap \omega_{k+1} \neq \emptyset,$$

одакле следи да је

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} \omega_i \neq \emptyset,$$

што је требало показати. □

Задатак 1.10. Ако је l број пресечних тачака свих дијагонала конвексног полигона $A_1A_2\dots A_n$, код кога се никоје три и више дијагонала не секу у једној тачки, доказати да је

$$l = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Решење: Први начин. Како је полигон $A_1A_2\dots A_n$ конвексан, са једне стране праве одређене дијагоном A_lA_k тог полигона, има $k-2$ темена, а са друге стране има $n-k$ темена. Како свака дијагонала која спаја два темена са разних страна праве A_lA_k сече дијагоналу A_lA_k , онда дијагонала A_lA_k сече остале дијагонале полигона $A_1A_2\dots A_n$ у $(k-2)(n-k)$ тачака. Нека је l_1 број пресечних тачака свих дијагонала из темена A_1 . Тада је

$$\begin{aligned} l_1 &= 1(n-3) + 2(n-4) + 3(n-5) + \dots + (n-3)1 \\ &= 1(n-1) - 2 + 2(n-1) - 3 + \dots + (n-3)(n-1) - (n-2) \\ &= (n-1)1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) \\ &\quad - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-3) \cdot (n-2)) \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3) - \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3). \end{aligned}$$

Како дијагонале из сваког другог темена секу остале дијагонале тог полигона у такође l_1 тачака и како се при томе свака пресечна тачка појављује четири пута имамо да је:

$$l = \frac{nl_1}{4} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

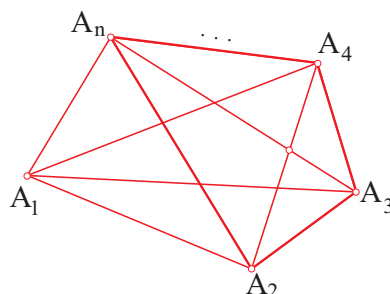
Други начин. Свакој пресечној тачки дијагонала придружен је један четвороугао и обратно (Слика 1.5.), што значи да постоји бијекција између скупа пресечних тачака дијагонала и скупа свих четвороуглова које чине тачке $A_1, A_2, \dots, A_n$. Од n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ могу се формирати

$$L_n = \binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

четвороуглова, па ће бити

$$l_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24},$$

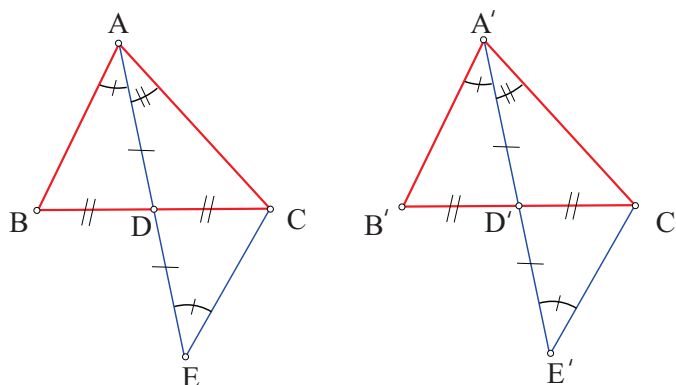
што је и требало доказати. $\square$



Слика 1.5.

1.2 Троугао

Задатак 1.11. Ако су тежиштина дуж AD , углови $\angle BAD$ и $\angle CAD$ троугла $\triangle ABC$ једнаки одговарајућим елементима троугла $\triangle A'B'C'$, доказати да су та два троугла подударна.



Слика 1.6.

Решење: Посматрајмо троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ (Слика 1.6.). Требамо показати да из: $AD = A'D'$, $\angle BAD = \angle B'A'D'$ и $\angle CAD = \angle C'A'D'$ следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

На полуправој AD одредимо тачку E тако да важи распоред тачака $B(A, D, E)$ и $AD = DE$. На исти начин, одредимо и код троугла $\triangle A'B'C'$ тачку E' на полуправој $A'D'$ тако да $B(A', D', E')$ и $A'D' = D'E'$ (Слика 1.6.). Сада је $AD = A'D'$, $AD = DE$, $A'D' = D'E'$ одакле следи $DE = D'E'$ а одакле

$$AE = AD + DE = A'D' + D'E' = A'E',$$

тј. $AE = AE'$

Посматрајмо троугло $\triangle ABD$ и $\triangle ECD$. За ова два троугла важи: $AD = DE$, $BD = CD$, $\angle BDA = \angle CDE$ (као унакрсни), одакле следи $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ на основу првог става о подударности троуглова. Из њихове подударности следи

$$AB = CE \quad \text{и} \quad \angle BAD = \angle CED \equiv \angle AEC. \quad (1.5)$$

Аналогним поступком добија се да је $\triangle A'B'D' \cong \triangle E'C'D'$, одакле следи да је

$$A'B' = C'E' \quad \text{и} \quad \angle B'A'D' = \angle C'E'D' \equiv \angle A'E'C'. \quad (1.6)$$

Сада из (1.5) и (1.6) добијамо да је $\angle AEC = \angle A'E'C'$.

Посматрајмо сада троуглове $\triangle AEC$ и $\triangle A'E'C'$. Они су подударни према другом ставу о подударности троуглова јер је $AE = A'E'$, $\angle AEC = \angle DEC = \angle D'E'C' = \angle A'E'C'$ и $\angle EAC = \angle DAC = \angle D'A'C' = \angle E'A'C'$. Из њихове подударности је $AC = A'C'$ и $CE = C'E'$.

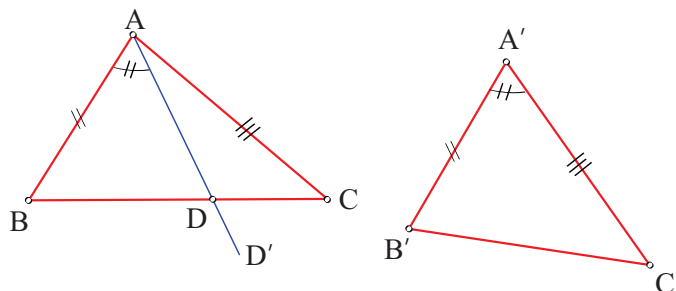
Сада из $CE = C'E'$, $CE = AB$ и $C'E' = A'B'$, следи да је $AB = A'B'$. Полуправа AD разлаже угао $\angle BAC$ на два угла, тј. важи $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \angle B'A'D' + \angle C'A'D' = \angle B'A'C'$. Сада за троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ имамо $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$ па је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ на основу првог става о подударности троуглова. $\square$

Задатак 1.12. Нека су AA_1 , BB_1 , CC_1 тежишне линије и AA_2 , BB_2 , CC_2 висине троугла $\triangle ABC$ а $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ тежишне линије и $A'A'_2$, $B'B'_2$, $C'C'_2$ висине троугла $\triangle A'B'C'$. Доказати да су троуглови ABC и $A'B'C'$ подударни ако је:

- (а) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AA_1 = A'A'_1$,
- (б) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BB_1 = B'B'_1$,
- (в) $BC = B'C'$, $BB_2 = B'B'_2$, $CC_2 = C'C'_2$,
- (г) $BC = B'C'$, $AA_1 = A'A'_1$, $AA_2 = A'A'_2$.

Задатак 1.13. Нека су дата два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, код којих је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A > \angle A'$. Доказати да је $BC > B'C'$.

Решење: Како је $\angle A > \angle A'$ то у углу $\angle A$ постоји полуправа AD' таква да је $\angle BAD' = \angle A'$. На полуправој AD' одредимо тачку D такву да је $AD \cong A'C'$. Како је још $A'C' \cong AC$ следи да је $AD \cong AC$. Сада могу

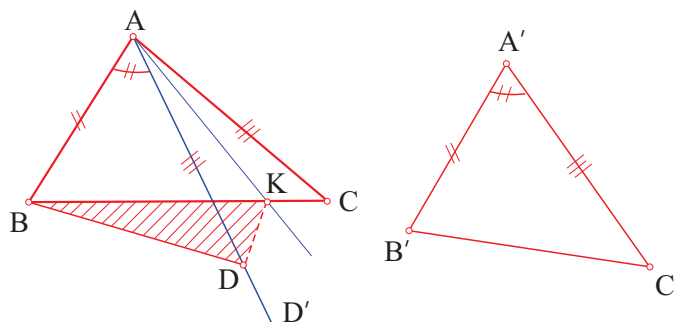


Слика 1.7.

наступити следећи случајеви: (i) $D \in BC$ и (ii) $D \notin BC$. Размотримо понаособ сваки од њих.

(i) Тачка $D \in BC$ (Слика 1.7.). Посматрајмо троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle A'B'C'$. За ова два троугла важи $AB \cong A'B'$, $AD \cong A'C'$ и $\angle BAD = \angle A'$, па је $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$ на основу првог става о подударности троуглова.

Из њихове подударности следи да је $BD \cong B'C'$. Из $D \in BC$, следи да важи распоред тачака $B(B, D, C)$ па је $BD < BC$. Даље важи $BD = B'C'$, одакле следи $B'C' < BC$.



Слика 1.8.

(ii) Тачка $D \notin BC$ (Слика 1.8.). Конструиримо симетралу s угла $\angle DAC$. Нека је K тачка добијена у пресеку симетрале s и стране BC троугла. Како је $AC \cong AD$ и s симетрала угла $\angle DAC$, следи да је $KD \cong KC$.

Применом неједнакости троугла за троугао $\triangle BDK$ добијамо $BD < BK + KD = BK + KC = BC$ тј. $BD < BC$. На исти начин као у

доказу дела задатка под (i) добијамо да је $BD \cong B'C'$, одакле следи да је $B'C' < BC$, што је требало показати. $\square$

Задатак 1.14. Нека су дата два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, код којих је $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ и $BC > B'C'$. Доказати да је $\angle A > \angle A'$.

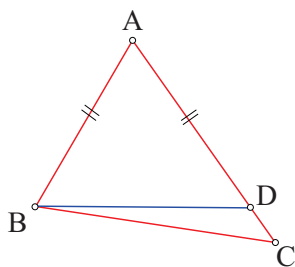
Решење: За углове $\angle A$ и $\angle A'$ важи тачно једна од могућности (i) $\angle A \cong \angle A'$, (ii) $\angle A < \angle A'$ и (iii) $\angle A > \angle A'$.

(i) Ако је $\angle A \cong \angle A'$, онда су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ подударни, одакле следи $BC \cong B'C'$, што је у супротности са претпоставком задатка. Дакле, не може бити $\angle A \cong \angle A'$.

(ii) Ако је $\angle A < \angle A'$, онда применом Задатка 1.13. закључујемо да је $BC < B'C'$, што је у супротности са претпоставком задатка. Дакле, не може бити ни $\angle A < \angle A'$.

(iii) Према томе, мора да важи $\angle A > \angle A'$. $\square$

Задатак 1.15. Наспрам веће странице у троуглу лежи већи угао, и обратно, наспрам већег угла лежи већа страница. Доказати.



Слика 1.9.

Решење: Нека је $\triangle ABC$ произвољан троугао и нека је $AC > AB$ (Слика 1.9.). Означимо са D тачку дужи AC такву да је $B(A, D, C)$ и $AD \cong AB$. Тада је полуправа BD унутар угла $\angle ABC$ троугла $\triangle ABC$ па је $\angle ABC > \angle ABD$. Троугао $\triangle ABD$ је једнакокраки па је $\angle ABD = \angle ADB$. У троуглу $\triangle BCD$ је $\angle ADB$ спољашњи несуседни за угао $\angle BCD$, па је $\angle ADB > \angle ACB$. Према томе, имамо $\angle ABC > \angle ACB$.

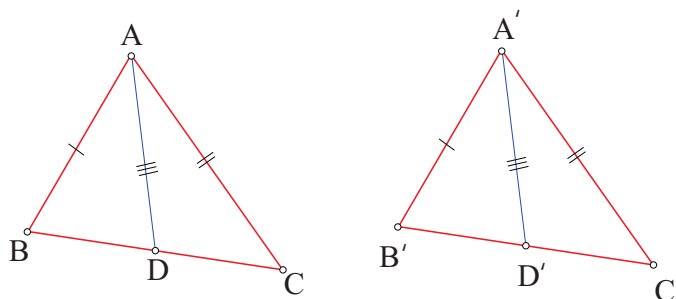
Обратно, нека је $\angle ABC > \angle ACB$. Тада за дужи AB и AC може важити тачно једна од могућности: (i) $AB = AC$, (ii) $AB < AC$ и (iii) $AB > AC$. Размотримо их понаособ.

(i) Нека је $AB = AC$. Тада је $\angle ABC = \angle ACB$, што је у супротности са претпоставком задатка.

(ii) Нека сада важи $AB < AC$. Тада је према доказаном делу задатка $\angle ABC < \angle ACB$, што је у супротности са претпоставком задатка.

(ii) Дакле, мора бити $AC > AB$. $\square$

Задатак 1.16. Ако је код троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, разлика страница AB и AC једнака разлици страница $A'B'$ и $A'C'$, страница BC једнака страници $B'C'$ и тежишна дуж AD једнака тежишној дужи $A'D'$, доказати да су ова два троугла подударна.



Слика 1.10.

Решење: Из $BC = B'C'$ следи $BD = B'D'$ и $DC = D'C'$. Докажимо да је $\angle ADB = \angle A'D'B'$. Претпоставимо да је $\angle ADB \neq \angle A'D'B'$. Тада за ова два угла постоје две могућности:

(i) $\angle ADB > \angle A'D'B'$ и (ii) $\angle ADB < \angle A'D'B'$

Размотримо понаособ оба случаја.

(i) Нека је $\angle ADB > \angle A'D'B'$. Тада је $\angle ADC < \angle A'D'C'$, као допуне до опруженог угла. Посматрајмо троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle A'B'D'$. За та два троугла важи $AD = A'D'$, $BD = B'D'$ и $\angle ADB > \angle A'D'B'$ одакле према Задатку 1.13. важи

$$AB > A'B'. \quad (1.7)$$

Посматрајмо сада троуглове $\triangle ADC$ и $\triangle A'D'C'$. Код њих је $AD = A'D'$, $DC = D'C'$ и $\angle ADC < \angle A'D'C'$, одакле према задатку 1.13. следи $AC < A'C'$, тј.

$$-AC > -A'C'. \quad (1.8)$$

Сабирањем релација (1.7) и (1.8) добијамо $AB - AC > A'B' - A'C'$, што је у супротности са претпоставком задатка $AB - AC = A'B' - A'C'$. Дакле случај $\angle ADB > \angle A'D'B'$ није могућ.

(ii) Аналогно и претпоставка $\angle ADB < \angle A'D'B'$ доводи до контрадикције.

Према томе, претпоставка $\angle ADB \neq \angle A'D'B'$ доводи до контрадикције па мора бити $\angle ADB = \angle A'D'B'$.

Уочимо сада троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle A'B'D'$. Код њих је $AD = A'D'$, $BD = B'D'$ и $\angle ADB = \angle A'D'B'$ па су они подударни на основу првог става о подударности троуглова. Следи једнакост преосталих елемената, тј. $AB = A'B'$. Такође и троуглови $\triangle ADC$ и $\triangle A'D'C'$ су подударни јер је $AD = A'D'$, $DC = D'C'$ и $\angle ADC = \angle A'D'C'$, па следи $AC = A'C'$.

Сада су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ подударни на основу трећег става о подударности троуглова јер је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$. $\square$

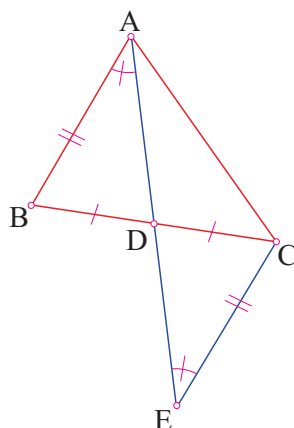
Задатак 1.17. Тачка D је средиште странице BC троугла $\triangle ABC$. Ако је $AC > AB$, доказати да је $\angle BAD > \angle CAD$ и обрнуто ако је $\angle BAD > \angle CAD$, тада је $AC > AB$.

Решење: Нека је $AC > AB$. Одредимо тачку E на правој одређеној тачкама A и D тако да важи распоред тачака $B(A, D, E)$ и да је $AD \cong DE$ (Слика 1.11). Троуглови $\triangle ABD$ и $\triangle ECD$ су подударни на основу првог става о подударности јер је $AD = ED$, $BD = CD$ и $\angle BDA = \angle CDE$.

Из подударности ових троуглова следи да је $AB = EC$ и $\angle BAD = \angle CED \equiv \angle CEA$. За троугао $\triangle AEC$ је задовољено $AC > AB = EC$, па на основу Задатка 1.15. следи да је $\angle CEA > \angle CAE \equiv \angle CAD$. Како је још $\angle CEA = \angle BAD$ добијамо да је $\angle BAD > \angle CAD$, што је и требало показати.

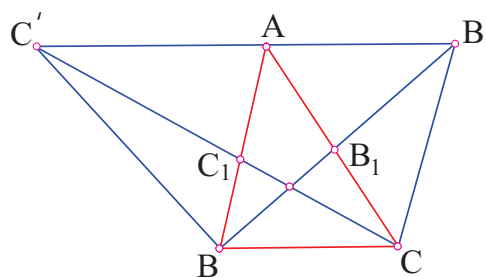
Обратно, нека је $\angle BAD > \angle CAD$. Треба показати да је $AC > AB$. Из $\angle BAD > \angle CAD$ следи $\angle CEA > \angle CAD$ одакле следи да је $AC > CE$. С обзиром на то да је $CE = AB$, добијамо $AC > AB$, што је требало показати. $\square$

Задатак 1.18. Доказати да су код троугла $\triangle ABC$ странице AB и AC једнаке ако су му једнаке:



Слика 1.11.

- (i) тежишне линије BB_1 и CC_1 ,
(ii) симетрале BB_2 и CC_2 унутрашњих углова $\angle B$ и $\angle C$,
(iii) висине BB_3 и CC_3 .



Слика 1.12.

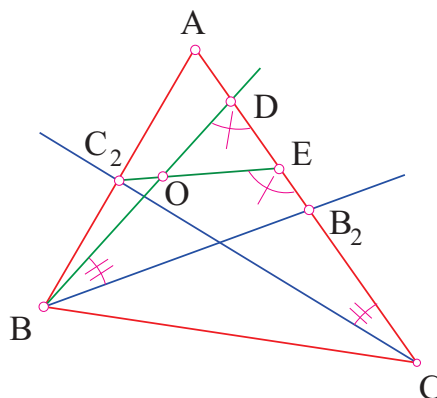
Решење: (i) За странице AB и AC троугла $\triangle ABC$ важи тачно једна од могућности: (1) $AC > AB$, (2) $AC < AB$ и (3) $AC = AB$. Размотримо понаособ сваку од могућности.

(1) Нека је $AC > AB$ а $BB_1 = CC_1$. Из $AC > AB$ следи $B_1C > C_1B$ а одавде према задатку 1.14. имамо $\angle B_1BC > \angle C_1CB$. На продужетку тежишне линије BB_1 уочимо тачку B' тако да важи распоред тачака $B' - B_1 - B$ и $BB_1 \cong B_1B'$ (Слика 1.12). Нека је C' тачка на правој CC_1 таква да важи $C - C_1 - C'$ и $CC_1 \cong C_1C'$. Посматрајмо троуглове $\triangle BB'C$ и $\triangle CC'B$. За ова два троугла важи да је $BC = CB$, $BB' = CC'$ и $\angle CBB' > \angle BCC'$ одакле следи да је $CB' > BC'$. Из

подударности троуглова $\triangle ABB_1 \cong \triangle CB'B_1$ и $\triangle ACC_1 \cong \triangle BC'C_1$ следи да је $CB' = AB$ и $BC' = AC$ одакле добијамо да је $AB > AC$ што је у супротности са претпоставком.

(2) Аналогно и претпоставка $AB > AC$ доводи до контрадикције.

(3) Дакле, преостаје да је $AB = AC$, а то је и требало показати.



Слика 1.13.

(ii) За дужи AC и AB важи тачно једна од могућности (1) $AC > AB$, (2) $AC < AB$ и (3) $AC = AB$. Размотримо све могућности понаособ.

(1) Нека је $AC > AB$. Тада је $\angle B > \angle C$. У $\angle ABB_2$ постоји полуправа BD таква да је $\angle B_2BD = \angle ACC_2$ (Слика 1.13), следи да је $CD > BD$ тј. да између тачака C и D постоји тачка E таква да је $BD = CE$. Троуглови $\triangle BB_2D$ и $\triangle CC_2E$ су подударни према првом ставу о подударности јер важи $BB_2 \cong CC_2$, $BD \cong CE$ и $\angle B_2BD = \angle ACC_2 \equiv \angle ECC_2$. Из подударности троуглова $\triangle BB_2D$ и $\triangle CC_2E$ следи да су одговарајући углови $\angle BDB_2$ и $\angle C_2EC$ једнаки.

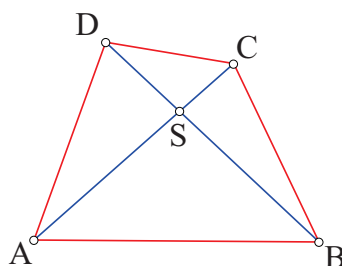
Према Пашовом ставу примењеном на неколинеарне тачке A , B , D и праву одређену тачкама C_2 и E , закључујемо да права C_2E сече дуж BD у тачки O , при чему важи распоред $B - O - D$.

Добијамо да је у $\triangle OED$ спољашњи угао $\angle C_2EC$ једнак несуседном унутрашњем углу $\angle ODE$ што је немогуће. Значи претпоставка $AC > AB$ доводи до контрадикције.

(2) Аналого показујемо да не важи ни да је $AC < AB$.

(3) Преостаје дакле да важи $AB = AC$.

(iii) Из подударности троуглова $\triangle ABB_3 \cong \triangle ACC_3$ следи $AB = AC$ (Слика 1.14). $\square$

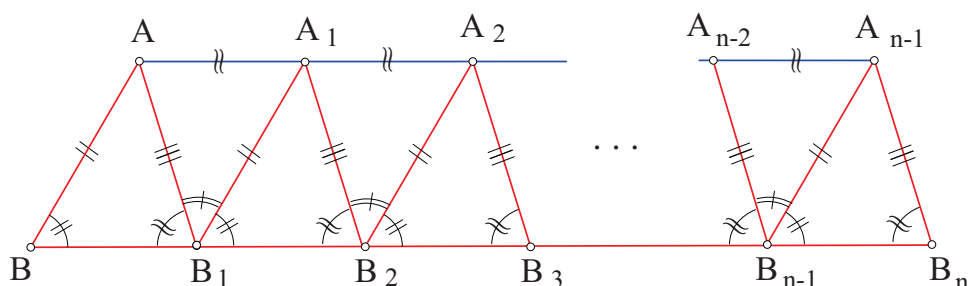


Слика 1.14.

Задатак 1.19. Троугао је једнакокрак ако и само ако важи да су му:

- (а) две висине подударне;
- (б) две тежишне линије подударне;
- (в) одсечци двеју симетрала унутрашњих углова између темена и наспрамне стране подударни.

Задатак 1.20. (Прва Лезандрова теорема) Доказати да збир унутрашњих углова произвољног троугла не може бити већи од збира два права угла.



Слика 1.15.

Решење: Претпоставимо да постоји троугао $\triangle ABB_1$ такав да му је збир унутрашњих углова $\sigma(\triangle ABB_1)$ већи од збира два права угла. На полуправој BB_1 конструишимо тачке $B_2, B_3, \dots, B_n$ тако да важи

$$B(B, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n) \quad \text{и} \quad BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n.$$

Са оне стране полуправе BB_1 са које је тачка A конструишимо тачке $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ (Слика 1.15.) такве да је

$$AB = A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_{n-1}B_{n-1} \quad \text{и} \\ AB_1 = A_1B_2 = A_2B_3 = \dots = A_{n-1}B_n.$$

Тада, према трећем ставу о подударности троуглова важи

$$\Delta ABB_1 \cong \Delta A_1B_1B_2 \cong \dots \cong \Delta A_{n-1}B_{n-1}B_n,$$

а одавде следи једнакост и осталих одговарајућих елемената

$$\angle ABB_1 = \angle A_1B_1B_2 = \dots = \angle A_{n-1}B_{n-1}B_n \\ \angle AB_1B = \angle A_1B_2B_1 = \dots = \angle A_{n-1}B_nB_{n-1}.$$

Одавде, као допуне једнаких углова до опруженог угла, следи једнакост углова

$$\angle AB_1A_1 = \angle A_1B_2A_2 = \dots = \angle A_{n-2}B_{n-1}A_{n-1}.$$

Посматрајмо следеће троуглове

$$\Delta AB_1A_1, \quad \Delta A_1B_2A_2, \dots, \Delta A_{n-2}B_{n-1}A_{n-1}.$$

Они су подударни применом првог става о подударности троуглова јер је

$$AB_1 = A_1B_2 = A_2B_3 = \dots = A_{n-2}B_{n-1} \\ AB = A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_{n-1}B_{n-1} \\ \angle AB_1A_1 = \angle A_1B_2A_2 = \dots = \angle A_{n-2}B_{n-1}A_{n-1}.$$

Тада су им и остали одговарајући елементи подударни, тј.

$$AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-2}A_{n-1}.$$

Посматрајмо полигон $BAA_1A_2\dots A_{n-1}B_n$. За овај полигон важи

$$BB_n < BA + AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-2}A_{n-1} + A_{n-1}B_n$$

тј.

$$n \cdot BB_1 < AB + (n-1)AA_1 + AB_1,$$

па је

$$n \cdot (BB_1 - AA_1) < AB + AB_1 - AA_1 = d = \text{const.} \quad (1.9)$$

За троугао ΔABB_1 по претпоставци важи да је збир његових унутрашњих углова већи од збира два права угла, тј. $\sigma(\Delta ABB_1) > 2R$, одакле следи да је

$$\angle ABB_1 + \angle BB_1A + \angle B_1AB > 2R. \quad (1.10)$$

Даље још важи

$$\angle BB_1A + \angle AB_1A_1 + \angle A_1B_1B_2 = 2R,$$

тј.

$$\angle BB_1A + \angle AB_1A_1 + \angle B_1AB = 2R. \quad (1.11)$$

Ако упоредимо једнакости (1.10) и (1.11) закључујемо да је $\angle BAB_1 > \angle AB_1A_1$. Посматрајмо троуглове $\triangle ABB_1$ и $\triangle AB_1A_1$. Код њих је $AB_1 = A_1B$, $AB = A_1B_1$ и $\angle B_1AB > \angle AB_1A_1$, одакле на основу Задатка 1.13. следи $BB_1 > AA_1$ тј.

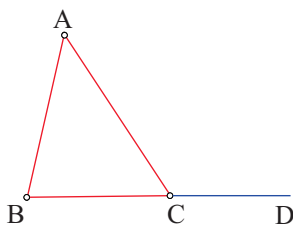
$$d_1 = BB_1 - AA_1 > 0. \quad (1.12)$$

Сада релацију (1.9) можемо представити у облику

$$n \cdot d_1 < d = \text{const.},$$

где је n произвољан природан број, што је узимајући у обзир (1.12), у супротности са Архимедовом аксиомом непрекидности. Према томе, претпоставка да да постоји троугао $\triangle ABB_1$ чији је збир унутрашњих углова већи од збира два права угла доводи до контрадикције. Дакле, не постоји троугао чији је збир унутрашњих углова већи од збира два права угла. $\square$

Задатак 1.21. Доказати да спољашњи угао у троуглу није мањи од збира два унутрашња несуседна угла тог троугла.



Слика 1.16.

Решење: Докажимо на пример да је $\angle A + \angle B \leq \angle ACD$ у троуглу $\triangle ABC$, где је R прав угао. На основу Задатка 1.15 следи $\angle A + \angle B + \angle C \leq 2R$. Како је још $\angle C + \angle ACD = 2R$ следи $\angle A + \angle B \leq \angle ACD$ (Слика 1.16.). $\square$

Задатак 1.22. Спољашњи угао троугла већи је од унутрашњег несуседног угла. Доказати.

Задатак 1.23. Доказати да збир унутрашњих углова простог равног n -тоугла не може бити већи од $2(n - 2)R$, при чему је R прав угао.

Задатак 1.24. Највише један угао у троуглу може бити прав или туп, а најмање два морају бити оштра. Доказати.

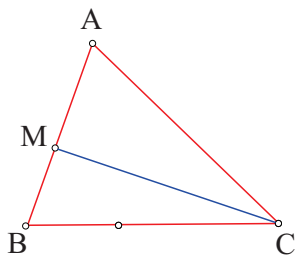
Решење: Искористити да је спољашњи угао троугла већи од унутрашњег несуседног. $\square$

Задатак 1.25. Наспрам правог (тупог) угла у троуглу налази се највећа страница тог троугла. Доказати.

Решење: Искористити да наспрам већег угла у троуглу лежи већа страница. $\square$

Задатак 1.26. Нека је M произвољна тачка на страници AB троугла $\triangle ABC$. Доказати да је $MC < \max\{AC, BC\}$.

Решење: Ако су углови $\angle AMC$ и $\angle BMC$ прави, онда применом Задатка 1.25. следи $MC < AC$ и $MC < BC$, тј. $MC < \max\{AC, BC\}$ (Слика 1.17).



Слика 1.17.

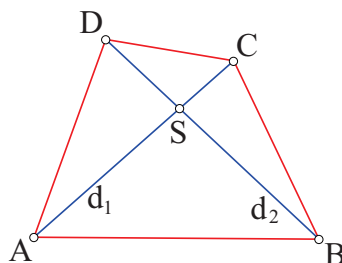
Ако је један од углова $\angle AMC$ и $\angle BMC$ туп, други је оштар. Нека је на пример угао $\angle AMC$ туп. Применом Задатка 1.25. на троугао $\triangle AMC$ следи $MC < AC$, тј. $MC < \max\{AC, BC\}$. $\square$

1.3 Четвороугао

Дефиниција 1.3.1 Четвороугао са три права угла називамо Ламбертовим четвороуглом. Ако су углови $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ Ламбертовог четвороугла $ABCD$ прави, тада су странице AB и BC основице а AD и CD висине Ламбертовог четвороугла.

Дефиниција 1.3.2 Четвороугао $ABCD$ код кога су углови $\angle A$ и $\angle B$ прави а $AD \cong BC$ називамо Сакеријевим четвороуглом. Страница AB је основица, CD противосновица а AD и BC су бочне странице Сакеријевог четвороугла.

Задатак 1.27. Доказати да је збир дијагонала конвексног четвороугла већи од полуобима p , а мањи од обима $2p$ тог четвороугла.



Слика 1.18.

Решење: Нека је дат произвољан четвороугао $ABCD$. Означимо дијагонале четвороугла са $d_1 = AC$, $d_2 = BD$. Нека је S пресечна тачка дијагонала AC и BD . Сада, због конвексности четвороугла $ABCD$ важи распоред тачака $B(A, S, C)$ и $B(B, S, D)$ (Слика 1.18). Применом неједнакости троугла редом на троуглове $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ добијамо $d_1 < AB + BC$, $d_1 < CD + AD$, $d_2 < AB + AD$ и $d_2 < BC + CD$. Сабирањем ове четири наједнакости и дељењем са 2 добијамо

$$d_1 + d_2 < AB + BC + CD + AD = 2p,$$

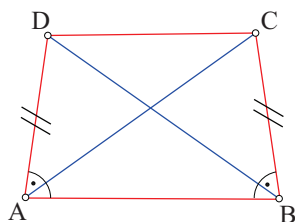
што је требало доказати.

Сада из троуглова $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ и $\triangle ADS$ редом следи $AB < AS + BS$, $BC < BS + CS$, $CD < CS + DS$ и $AD < AS + DS$. Сабирањем левих и десних страна последње четири неједнакости и дељењем са 2 добијамо

$$d_1 + d_2 > p,$$

што је и требало показати. $\square$

Задатак 1.28. Код Сакеријевог четвороугла $ABCD$ са основицом AB и противосновицом CD важи $\angle C \cong \angle D$. Доказати.

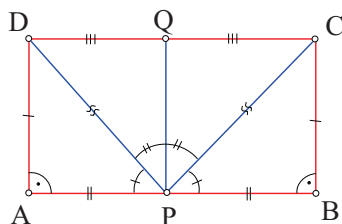


Слика 1.19.

Решење: Троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ (Слика 1.19) су подударни на основу првог става о подударности троуглова. Из њихове подударности следи $AC \cong BD$. Сада троуглови $\triangle ACD$ и $\triangle BDC$ имају подударне све три одговарајуће стране, одакле следи њихова подударност према трећем ставу о подударности троуглова. Дакле, $\angle ADC \cong \angle BCD$. $\square$

Дефиниција 1.3.3 Дуж која спаја средишта основице и противосновице Сакеријевог четвороугла је средња линија тог четвороугла.

Задатак 1.29. Средња линија Сакеријевог четвороугла разлаже тај четвороугао на два Ламбертова четвороугла. Доказати.



Слика 1.20.

Решење: Нека су P и Q средишта редом основице AB и противосновице CD (Слика 1.20) Сакеријевог четвороугла $ABCD$. Троуглови $\triangle APD$ и $\triangle BPC$ су подударни на основу првог става о подударности троуглова.

Из њихове подударности следи $PD \cong PC$ и $\angle APD \cong \angle BPC$. Сада су троуглови $\triangle PQD$ и $\triangle PQC$ подударни према трећем ставу о подударности троуглова, одакле следи $\angle QPD \cong \angle QPC$ и $\angle PQD \cong \angle PQC$. Углови $\angle PQD$ и $\angle PQC$ су подударни и напоредни, дакле прави. Како је још

$$\angle APQ = \angle APD + \angle QPD = \angle BPC + \angle QPC = \angle BPQ,$$

то су и углови $\angle APQ$ и $\angle BPQ$ прави. Дакле, четвороуглови $APQD$ и $BPQC$ су Ламбертови. $\square$

Задатак 1.30. Средња линија Сакеријевог четвороугла је заједничка нормала основице и противосновице. Доказати.

Решење: Директно следи из Задатка 1.29.

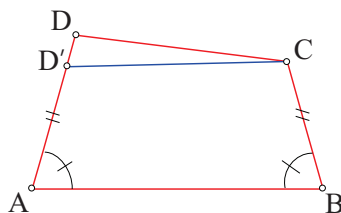
Задатак 1.31. Ако је код простог четвороугла $ABCD$: $\angle A \cong \angle B$ и $AD \cong BC$ тада је $\angle C \cong \angle D$. Доказати.

Решење: Аналогно као у Задатку 1.28.

Задатак 1.32. Ако је код простог четвороугла $ABCD$, $\angle A \cong \angle B$ и $\angle D > \angle C$ тада је $BC > AD$. Доказати.

Решење: За дужи BC и AD важи тачно једна од релација: (i) $BC \cong AD$, (ii) $BC < AD$ или (iii) $BC > AD$.

(i) Нека је $BC \cong AD$. Како је још $\angle A \cong \angle B$, то на основу Задатка 1.31. следи $\angle C \cong \angle D$, што је у супротности са претпоставком.



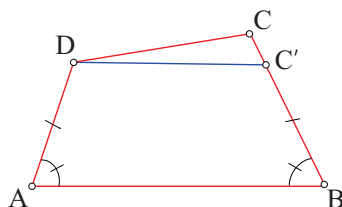
Слика 1.21.

(ii) Ако је $BC < AD$, тада постоји тачка D' (Слика 1.21) таква да је $AD' \cong BC$ и $\angle(A, D', D)$. Четвороугао $ABCD'$ је прост јер су тачке

C и D' са исте стране праве AB и задовољава све услове Задатка 1.31. одакле следи $\angle BCD' \cong \angle CD'A$. Тачка D' припада дужи AD , одакле следи да D' припада унутрашњости угла $\angle BCD$, па је $\angle BCD > \angle BCD'$ и како је још $\angle BCD' \cong \angle CD'A$, следи $\angle BCD > \angle CD'A$. Угао $\angle CD'A$ је спољашњи несуседни углу $\angle CDD' \equiv \angle CDA$ троугла $\triangle CDD'$, одакле следи $\angle BCD > \angle CDA$, што је у супротности са претпоставком задатка. Према томе не може бити $BC < AD$.

(iii) Дакле, преостаје да мора да важи $BC > AD$. $\square$

Задатак 1.33. Ако је код четвороугла $ABCD$: $\angle A \cong \angle B$ и $BC > AD$ тада је $\angle D > \angle C$. Доказати.



Слика 1.22.

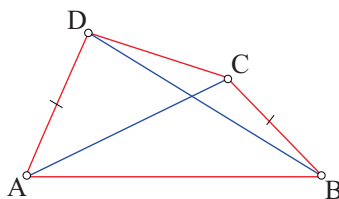
Решење: Из $BC > AD$ следи да постоји тачка C' (Слика 1.22) таква да је $BC' \cong AD$ и $B(B, C', C)$. Четвороугао $ABC'D$ задовољава све услове Задатка 1.31. одакле је $\angle BC'D \cong \angle ADC'$. Угао $\angle BC'D$ је спољашњи несуседни углу $\angle C$ троугла $\triangle CDC'$ па је $\angle BC'D > \angle C$. Дакле

$$\angle ADC > \angle ADC' \cong \angle BC'D > \angle BCD,$$

тј. $\angle D > \angle C$. $\square$

Задатак 1.34. Ако је код простог четвороугла $ABCD$: $AD \cong BC$ и $\angle A > \angle B$, тада је $\angle C > \angle D$. Доказати.

Решење: За троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ је $BC \cong AD$, $AB \equiv AB$ и $\angle ABC < \angle ABD$ (Слика 1.23) па је $AC < BD$. Сада за троуглове $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ важи $CD \equiv CD$, $AD \cong BC$ и $AC < BD$, одакле је $\angle ADC < \angle BCD$, тј. $\angle D < \angle C$. $\square$

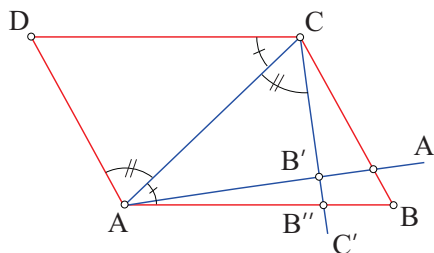


Слика 1.23.

Задатак 1.35. Ако је код простог четвороугла $ABCD$ $\angle A \cong \angle C$ и $\angle B \cong \angle D$, тада је $AB \cong DC$ и $BC \cong AD$. Доказати.

Решење: За углове $\angle ACD$ и $\angle CAB$ важи тачно једна од релација (i) $\angle ACD < \angle CAB$, (ii) $\angle ACD > \angle CAB$ или (iii) $\angle ACD = \angle CAB$.

(i) Ако је $\angle ACD < \angle CAD$ тада је и $\angle ACB > \angle CAD$. У углу $\angle ACB$ постоји полуправа CC' (Слика 1.24) таква да је $\angle ACC' \cong \angle CAD$. На исти начин постоји полуправа AA' унутар угла $\angle CAB$ таква да је $\angle CAA' \cong \angle ACD$. Означимо са B' пресечну тачку полуправих AA' и CC' . Није тешко закључити, применом Пашове аксиоме, да се тачка B' налази унутар троугла $\triangle ABC$.



Слика 1.24.

Троуглови $\triangle ACB'$ и $\triangle ACD$ су подударни према другом ставу о подударности троуглова. Одавде следи $\angle AB'C \cong \angle D$. Како је још $\angle D \cong \angle B$ добијамо

$$\angle AB'C \cong \angle ABC \quad (1.13)$$

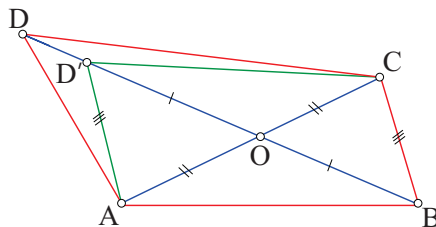
Означимо са B'' пресечну тачку правих CC' и AB . Угао $\angle AB'C$ је спољашњи несуседни у троуглу $\triangle AB''B'$ углу $\angle AB''B'$ па је $\angle AB'C > \angle AB''B'$. На исти начин је $\angle AB''B' > \angle ABC$ као спољашњи несуседни у троуглу $\triangle B''BC$. Добија се $\angle AB'C > \angle ABC$, што је у супротности са (1.13). Према томе не може бити $\angle ACD < \angle CAB$.

(ii) Аналогно, претпоставка $\angle ACD > \angle CAB$ доводи до контрадикције.

(iii) Дакле, преостаје да је $\angle ACD \cong \angle CAB$. Тада је $\angle ACB \cong \angle CAD$ као допуне једнаких углова до једнаких. Сада су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ подударни према другом ставу о подударности троуглова, одакле следи $AB \cong CD$ и $BC \cong AD$. $\square$

Задатак 1.36. Ако је код простог четвороугла $ABCD$, $\angle B \cong \angle D$ и ако средиште дијагонале AC лежи на дијагонали BD , тада су наспрамне стране тог четвороугла подударне међусобно. Доказати.

Решење: Означимо са D' тачку праве BD такву да је $OB \cong OD'$ и $D, D' \overset{\cdot\cdot}{\parallel} O$. Тада важи тачно једна од релација (i) $\mathcal{B}(O, D', D)$, (ii) $\mathcal{B}(O, D, D')$ или (iii) $D' \equiv D$.



Слика 1.25.

(i) Нека је $\mathcal{B}(O, D', D)$. За труглове $\triangle OAB$ и $\triangle OCD'$ (Слика 1.25) је $AO \cong OC$, $OB \cong OD'$ и $\angle AOB \cong \angle COD'$ па су они подударни према првом ставу о подударности троуглова. Из њихове подударности следи $AB \cong CD'$. Такође су и троуглови $\triangle AOD'$ и $\triangle COB$ подударни према првом ставу о подударности јер је $AO \cong CO$, $OD' \cong OB$ и $\angle AOD' \cong \angle COB$. Одавде је $DA' \cong CB$. За троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle CD'A$ је $AC \equiv CA$, $AB \cong CD'$ и $BC \cong D'A$, тј. и они су подударни, одакле је $\angle ABC \cong \angle AD'C$. Како је још $\angle ABC \cong \angle ADC$ следи $\angle ADC \cong \angle AD'C$, што је у супротности са $\angle ADC < \angle AD'C$. Према томе није $\mathcal{B}(O, D', D)$.

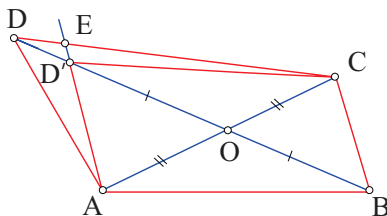
(ii) Аналогно, и претпоставка $\mathcal{B}(O, D, D')$ доводи до контрадикције.

(iii) Према томе мора бити $D \equiv D'$, тј. $AB \cong CD' \equiv CD$ и $BC \cong DA' \equiv DA$. $\square$

Задатак 1.37. Ако је код простог четвороугла $ABCD$,

$$AB + BC \cong CD + DA$$

и ако је средиште O дијагонале AC на дијагонали BD , тада су насупрамне стране тог четвороугла подударне. Доказати.



Слика 1.26.

Решење: Нека је D' тачка праве BD таква да је $OD' \cong OB$ и $D, D' \ddot{=} O$. Тада могу наступити следећи случајеви:

(i) $\mathcal{B}(O, D', D)$, (ii) $\mathcal{B}(O, D, D')$ или (iii) $D' \equiv D$.

(i) Нека је $\mathcal{B}(O, D', D)$. Троуглови $\triangle AOB$ и $\triangle COD'$ (Слика 1.26) су подударни, одакле је $AB \cong CD'$. Такође из подударности троуглова $\triangle BOC$ и $\triangle D'OA$ следи $BC \cong D'A$. Из последње две једнакости је $AB + BC \cong CD' + D'A$. По претпоставци је $AB + BC \cong CD + DA$, па је

$$CD + DA \cong CD' + D'A.$$

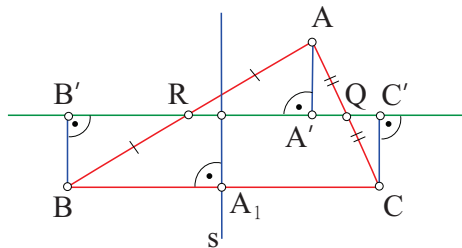
Означимо са E пресечну тачку правих AD' и CD . Тада је $\mathcal{B}(C, E, D)$ и $CD' + D'A < D'A + D'E + EC = AE + EC < DA + DE + EC = CD + DA$, тј. $CD' + AD' < CD + DA$ одакле следи $CD + DA > AB + BC$, што је у супротности са претпоставком задатка.

(ii) Аналогно и претпоставка $\mathcal{B}(O, D, D')$ доводи до контрадикције.

(iii) Према томе мора бити $D \equiv D'$. Из подударности троуглова $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ следи $AB \cong CD$, док из подударности троуглова $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ следи $BC \cong AD$. $\square$

Задатак 1.38. Права одређена средиштима Q и R страница AC и AB троугла $\triangle ABC$ управна је на медијатрису s треће странице тог троугла. Доказати.

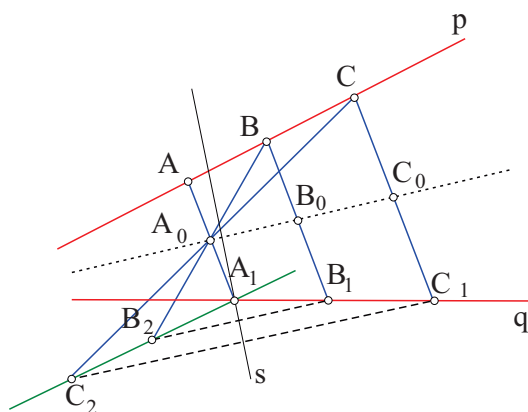
Решење: Означимо са A' , B' и C' (Слика 1.27) редом подножја нормала из тачака A , B и C на праву QR . Тада је $\triangle AA'R \cong \triangle BB'R$ и $\triangle AA'Q \cong \triangle CC'Q$, одакле је $AA' \cong BB'$ и $AA' \cong CC'$. Према томе, четвороугао $B'C'SB$ је Сакеријев са основицом $B'C'$ и противосновицом



Слика 1.27.

BC . На основу Задатка 1.30. средња линија Сакеријевог четвороугла је заједничка нормала основице и противосновице, тј. медијатриса s странице BC управна је на праву $QR \equiv B'C'$. $\square$

Задатак 1.39. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве p и A_1, B_1, C_1 истим редом тачке неке праве q , такве да је $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и важи распоред тачака $B(A, B, C)$, $B(A_1, B_1, C_1)$. Доказати да средишта A_0, B_0, C_0 редом дужи AA_1, BB_1, CC_1 припадају истој правој или се поклапају.



Слика 1.28.

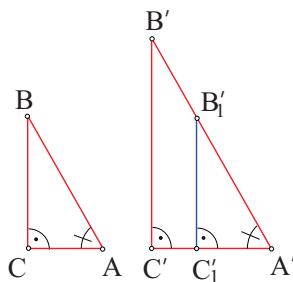
Решење: Претпоставимо да се тачке A_0, B_0, C_0 не поклапају. Обележимо са B_2 тачку симетричну тачки B у односу на A_0 а са C_2 тачку симетричну тачки C у односу на A_0 (Слика 1.28). Како су тачке A_1, B_2 и C_2 симетричне у односу на A_0 колинеарним тачкама A, B, C , то ће и оне бити колинеарне. Посматрајмо троуглове $\triangle ABA_0$ и троугао

$\Delta A_1 B_2 A_0$, за ова два троугла имамо да је $AA_0 = A_1 A_0$, $A_0 B = A_0 B_2$, $\angle AA_0 B = \angle A_1 A_0 B_2$, па на основу првог става о подударности следи да су ова два троугла подударна. Из њихове подударности је $AB = A_1 B_2$. Сада из $AB = A_1 B_2$ и $A_1 B_1 = AB$ следи да је $A_1 B_1 = A_1 B_2$ тј. $\Delta A_1 B_1 B_2$ је једнакокрак. Аналогно за троуглове $\Delta AC A_0$ и $\Delta A_1 C_2 A_0$, следи да су подударни на основу првог става јер је $CA_0 = C_2 A_0$, $AA_0 = A_1 A_0$, $\angle AA_0 C = \angle A_1 A_0 C_2$. Следи да је $AC = A_1 C_2$. Сада због $AB = A_1 B_1$, $BC = B_1 C_1$ и распореда тачака $B(A, B, C)$, $B(A_1, B_1, C_1)$, имамо да је $AC = A_1 C_1$. Како је још $AC = A_1 C_2$ следи $A_1 C_1 = A_1 C_2$, тј. троугао $\Delta A_1 C_1 C_2$ једнакокраки.

Једнакокраки троуглолви $\Delta A_1 B_1 B_2$ и $\Delta A_1 C_1 C_2$ имају заједничко теме и заједничку симетралу основица, обележимо је са s . Посматрајмо $\Delta BB_1 B_2$. Важи $BA_0 = A_0 B_2$, $BB_0 = B_0 B_1$ и s је симетрала основице BB_1 па је према Задатка 1.38. $s \perp A_0 B_0$. Аналогно, за $\Delta CC_1 C_2$ важи $CA_0 = A_0 C_2$, $CC_0 = C_0 C_1$ и s је симетрала основице CC_1 , одакле на основу Задатка 1.38. следи да је $s \perp A_0 C_0$. Дакле, $s \perp A_0 B_0$ и $s \perp A_0 C_0$, одакле следи према теореме о јединствености нормале да се праве $A_0 B_0$ и $A_0 C_0$ поклапају тј. тачке A_0, B_0, C_0 су колинеарне. $\square$

Напомена: Праве p и q могу бити и мимоилазне.

Задатак 1.40. Ако за два правоугла троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$ са правим угловима код темена $\angle C$ и $\angle C'$ важи $\angle A = \angle A'$ и $AB < A'B'$, тада је $AC < A'C'$. Доказати.



Слика 1.29.

Решење: Из $AB < A'B'$ следи да постоји тачка $B'_1 \in A'B'$ таква да је $B(A', B'_1, B')$ и $A'B'_1 = AB$. Означимо са C'_1 подножје нормале из тачке B'_1 на праву $A'C'$ (Слика 1.29). Тада важи тачно један од распореда тачака: (i) $B(C'_1, C', A')$, (ii) $B(C', A', C'_1)$ или (iii) $B(C', C'_1, A')$.

(i) Ако би било $\mathcal{B}(C'_1, C', A')$, тада би добили троугао са два права угла, што је немогуће.

(ii) Ако би важио распоред тачака $\mathcal{B}(C', A', C'_1)$, онда би смо добили троугао код кога је један угао прав а други туп, што је такође немогуће.

(iii) Дакле, мора да важи распоред тачака $\mathcal{B}(C', C'_1, A')$, па је

$$A'C'_1 < A'C' \quad (1.14)$$

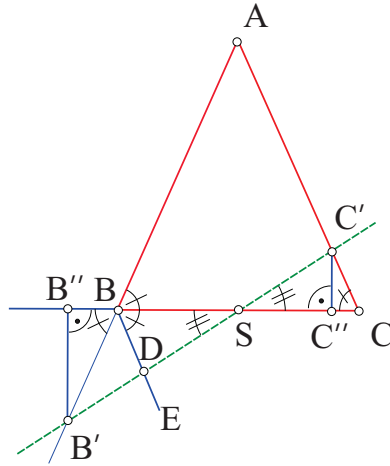
Троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'_1C'_1$ су подударни јер је $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C' = R$ и $AB = A'B'_1$, па је

$$AC = A'C'_1. \quad (1.15)$$

Из (1.14) и (1.15) следи $AC < A'C'$. $\square$

Задатак 1.41. Ако су B' и C' тачке у којима нека права s кроз средиште S основице BC једнакокраког троугла $\triangle ABC$ сече праве AB и AC , при чему важи распоред тачака $\mathcal{B}(B', S, C')$, доказати да је дуж $B'C'$ већа од дужи BC .

Решење: Према Пашовој аксиоми права s мора сећи бар још једну од станица AB и AC . Не умањујући општост доказа претпоставимо да је $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C', C)$ (Слика 1.30). Требамо показати да је $B'C' > BC$.



Слика 1.30.

Угао $\angle CBB'$ је спољашњи несуседни углу $\angle ACB$ троугла $\triangle ABC$, па је $\angle CBB' > \angle ACB$. То значи да постоји полуправа BE у углу $\angle CBB'$ таква да је $\angle CBE = \angle ACB$. Означимо са D пресечну тачку полуправе BE са правом s . Тада важи распоред тачака $B(S, D, B')$. Посматрајмо троуглове $\triangle DBS$ и $\triangle C'SC$. Важи $BS = CS$, $\angle DBS = \angle C'SC$ и $\angle BSD = \angle C'SC$, па су троуглови $\triangle DBS$ и $\triangle C'SC$ подударни према другом ставу о подударности троуглова. Из њихове подударности следи да је $SD = SC'$. Из $B(S, D, B')$ је $SD < SB'$, па је $SC' < SB'$. Означимо са B'' и C'' подножја нормала редом из тачака B' и C' на праву BC . За правоугле троуглове $\triangle SC'C''$ и $\triangle SB'B''$ важи $\angle C'SC'' = \angle B'SB''$ и $SC' < SB'$. Тада на основу Задатка 1.40. следи $C'C'' < B'B''$.

Сада за правоугле троуглове $\triangle BB'B''$ и $\triangle CC'C''$ важи $\angle B'BB'' = \angle C'CC''$ и $B'B'' > C'C''$. Према Задатку 1.40. следи

$$BB'' > CC''. \quad (1.16)$$

Из $B(A, C', C)$ и $B(A, B, B')$ следи $B(B'', B, C'', C)$. Одавде је

$$B''C'' = B''B + BC'' \stackrel{(1.16)}{>} C''C + BC'' = BC,$$

тј.

$$BC < B''C'' = B''S + SC'', \quad (1.17)$$

У правоуглом троуглу катета је мања од хипотенузе, па важи

$$B''S < B'S, \quad C''S < C'S \quad (1.18)$$

Сада из (1.17) и (1.18) следи

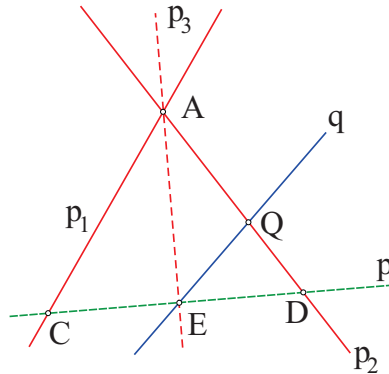
$$BC < B''S + SC' < B'S + C'S = B'C',$$

тј. $B'C' > BC$ а то је и требало показати. $\square$

Задатак 1.42. Ако је у равни дат скуп од n правих при чему се сваке две од тих правих секу у тачки која припада бар још једној правој истог скупа, доказати да се свих n правих секу у једној тачки.

Решење: Претпоставимо да постоји права из датог скупа која не садржи све пресечне тачке осталих правих, тј. да се свих n правих не секу у једној тачки. Нека је p права која не садржи пресечне тачке осталих

правих и нека је A пресечна тачка двеју правих из овог скупа која не припада правој p , а има особину да је њено растојање до праве p најмање (Слика 1.31). По претпоставци задатка сваке две праве из овог скупа се секу. Нека праве p_1 и p_2 припадају датом скупу. Тада ће праве p_1 и p_2 сећи праву p у тачкама C и D . Даље, по претпоставци задатка кроз пресечну тачку правих p_1 и p_2 пролази бар још једна права p_3 датог скупа. Она сече праву p у некој тачки E . Тачке C , D и E су колинеарне па важи један од распореда $\mathcal{B}(C, E, D)$, $\mathcal{B}(C, D, E)$, $\mathcal{B}(D, C, E)$. Претпоставимо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(C, E, D)$. Тада по претпоставци задатка кроз тачку E постоји бар још једна права q датог скупа, различита од p и p_3 , па према томе права q има особину да не садржи ни једно теме троугла $\triangle ACD$ и сече страницу CD у тачки E таквој да је $\mathcal{B}(C, E, D)$. Према Папковој аксиоми права q мора сећи још једну страницу посматраног троугла $\triangle ACD$. Не умањујући општост доказа претпоставимо да права q сече страницу AD у тачки Q таквој да је $\mathcal{B}(A, Q, D)$, па је растојање тачке Q до праве p мање од растојања тачке A до исте праве p , а како је још Q пресечна тачка правих q и p_2 из датог скупа, то смо добили чињеницу супротну претпоставци да је A пресечна тачка правих из датог скупа чије је растојање до праве p најмање. претпоставка да постоји права која не садржи све пресечне тачке

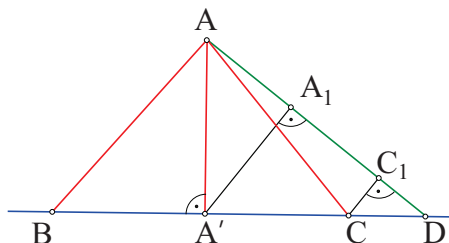


Слика 1.31.

правих из датог скупа доводи до контрадикције, па се свих n правих из датог скупа секу у једној тачки. $\square$

Задатак 1.43. Ако свака права одређена двема тачкама неког коначног скупа од n тачака садржи најмање још једну тачку тог скупа, доказати да свих n тачака тог скупа припадају једној правој.

Решење: Претпоставимо да тачке датог скупа нису колинеарне. Нека су A, B, C оне три неколинеарне тачке датог скупа за које је растојање једне од њих до праве одређене другим двема најкраће. Нека је растојање тачке A до праве BC најкраће. По претпоставци свака права одређена двема тачкама тог скупа садржи бар још једну тачку тог скупа. Значи, на правој BC постоји нека тачка D из тог скупа. Тачке B, C и D су колинеарне па важи један од распореда тачака $\mathcal{B}(B, C, D)$, $\mathcal{B}(D, B, C)$, $\mathcal{B}(C, D, B)$. Не умањући општост претпоставимо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(B, C, D)$. Означимо са A' подножје нормале из тачке



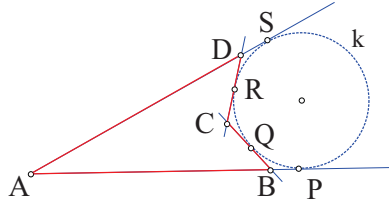
Слика 1.32.

A на праву BC . Бар две од тачака B, C и D су са исте стране тачке A' . Нека су то тачке C и D , тј. нека важи распоред тачака $\mathcal{B}(A', C, D)$. Означимо са A_1 и C_1 подножја нормала редом из тачака A' и C на праву AD . Тада је $CC_1 < A'A_1$. Даље важи $A'A_1 < AA'$ као однос катете и хипотенузе у правоуглом троуглу $\triangle AA'A_1$. Из последње две неједнакости добијамо $CC_1 < AA'$. Дуж CC_1 представља растојање тачке C до праве AD одређене двема тачкама датог скупа и ово растојање је мање од растојања тачке A до праве BC , што је супротно уведеној претпоставци. Дакле, свих n тачака посматраног скупа припадају једној правој. $\square$

Задатак 1.44. Ако су странице простог четвороугла $ABCD$ на тангентама круга k који се налази изван тог четвороугла, доказати да је разлика двеју наспрамних страница једнака разлици других двеју наспрамних страница тог четвороугла.

Решење: Разликујемо два случаја: (i) четвороугао $ABCD$ неконвексан и (ii) четвороугао $ABCD$ конвексан. Размотримо понаособ сваки од ових случајева:

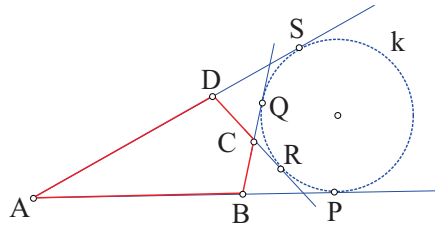
(i) Четвороугао $ABCD$ је неконвексан. Обележимо са P, Q, R, S тачке у којима редом праве AB, BC, CD, DA додирују круг k и нека



Слика 1.33.

при томе важи: $B(A, B, P)$, $B(B, Q, C)$, $B(C, R, D)$ и $B(A, D, S)$ (Слика 1.33). Тангентне дужи из исте тачке на дати круг су једнаке, па је

$$\begin{aligned} AB - CD &= AP - BP - (CR + DR) \\ &= AS - BQ - CQ - DS \\ &= AS - DS - (BQ + CQ) = AD - BC. \end{aligned}$$



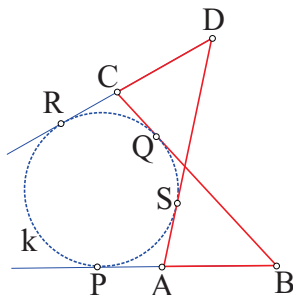
Слика 1.34.

(ii) Четвороугао $ABCD$ је конвексан. Обележимо са P, Q, R, S тачке у којима редом праве AB, BC, CD, DA додирују круг k и нека при томе важи: $B(A, B, P)$, $B(B, C, Q)$, $B(D, C, R)$, $B(A, D, S)$ (Слика 1.34). Коришћењем једнакости тангентних дужи добијамо

$$\begin{aligned} AB - CD &= AP - BP - DR + CR \\ &= AS - BQ - DS + CQ \\ &= AD - (BQ - CQ) = AD - BC, \end{aligned}$$

што је и тебало доказати. $\square$

Задатак 1.45. Ако су странице сложеног четвороугла $ABCD$ на тангентама круга k , доказати да је разлика двеју наспрамних страница тог четвороугла једнака разлици других двеју наспрамних страница.



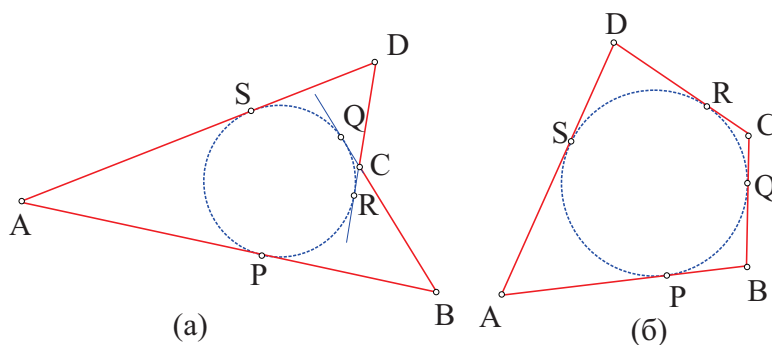
Слика 1.35.

Решење: Обележимо са P, Q, R, S тачке у којима редом праве AB, BC, CD и DA додирују круг k и нека при томе важи: $\angle(A, B, P), \angle(B, Q, C), \angle(D, C, R)$ и $\angle(A, S, D)$ (Слика 1.35). Коришћењем једнакости тангентних дужи добијамо

$$\begin{aligned} AB - CD &= PB - PA - RD + RC \\ &= QB - SA - SD + QC = QB + QC - (SA + SD) = BC - AD, \end{aligned}$$

што је и требало доказати $\square$

Задатак 1.46. Ако праве одређене страницама простог четвороугла $ABCD$ додирују неки круг k који се налази у том четвороуглу, дока-
зати да је код тог четвороугла збир двеју наспрамних станица једнак
збиру других двеју наспрамних страница.



Слика 1.36.

Решење: Нека су P, Q, R, S тачке у којима редом праве AB, BC, CD и DA додирују круг k . Разликујемо два случаја:

(i) Важе распореди тачака $B(A, P, B)$, $B(B, C, Q)$, $B(D, C, R)$ и $B(A, S, D)$ (Слика 1.36 (а)). Тада је

$$\begin{aligned} AB + CD &= PA + PB + RD - RC = SA + QB + SD - QC \\ &= (SA + SD) + (QB - QC) = AD + BC. \end{aligned}$$

(ii) Важе распореди тачака $B(A, P, B)$, $B(B, Q, C)$, $B(D, R, C)$ и $B(A, S, D)$ (Слика 1.36 (б)). Тада је

$$\begin{aligned} AB + CD &= PA + PB + RD + RC = SA + QB + SD + QC \\ &= (SA + SD) + (QB + QC) = AD + BC. \end{aligned}$$

што је и требало доказати. $\square$

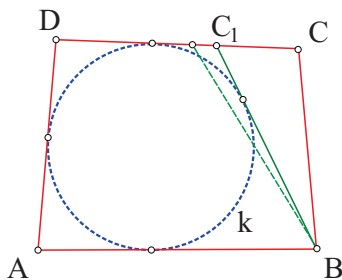
Задатак 1.47. Ако је збир двеју наспрамних страница простог четвороугла једнак збиру других двеју наспрамних страница, онда се у тај четвороугао може уписати круг. Доказати.

Решење: Нека за четвороугао $ABCD$ важи $AB + CD = BC + AD$. Констриуимо круг k са особином да додирује странице AB, AD, CD четвороугла $ABCD$ (Слика 1.37). За страницу BC и круг k могу наступити следећи случајеви:

- (i) да немају заједничких тачака тј. $k \cap BC = \emptyset$,
- (ii) да имају две заједничке тачке тј. $k \cap BC = \{P, P_1\}$,
- (iii) да имају једну заједничку тачку тј. $k \cap BC = \{T\}$.

Показаћемо да под условима задатка случајеви (i) и (ii) нису могући.

(i) Претпоставимо да BC нема заједничких тачака са кругом k , тј. $k \cap BC = \emptyset$. Нека је t тангента из тачке B на круг k . Она постоји јер



Слика 1.37.

је $k \cap BC = \emptyset$ и B не припада кругу (Слика 1.37). Означимо са C_1 пресечну тачку правих t и DC . Тада важи распоред тачака $\mathcal{B}(D, C_1, C)$. Четвороугао ABC_1D задовољава све услове Задатка 1.46. па важи

$$AB + DC_1 = AD + BC_1.$$

Из претпоставке задатка имамо да је

$$AB + CD = AD + BC.$$

Одузимањем прве од друге једначине добијамо $CD - DC_1 = BC - BC_1$, тј. $CC_1 = BC - BC_1$. Ово је немогуће јер су CC_1 , BC и BC_1 странице троугла ΔBCC_1 . Дакле, претпоставка да права BC не додирује круг k доводи до контрадикције.

(ii) Ако би претпоставили да права BC сече круг k , аналогним разматрањем би дошли до контрадикције.

(iii) Преостаје још могућност да BC додирије круг k тј. да је круг уписан у четвороугао $ABCD$. $\square$

Задатак 1.48. Потребан и довољан услов да се у прост четвороугао може уписати круг јесте да су зборови наспрамних страница тог четвороугла једнаки. Доказати.

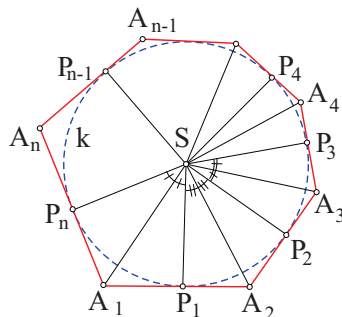
Решење: Следи из задатака 1.46. и 1.47.

Задатак 1.49. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ код кога су кругови уписани у троуглове ΔABC и ΔADC , са особином да додирују дијагоналу AC у истој тачки, доказати да се у тај четвороугао може уписати круг.

Задатак 1.50. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ такав да кругови уписани у троуглове ΔABC и ΔCDA додирују дијагоналу AC у истој тачки, доказати да и кругови уписани у троуглове ΔABD и ΔBCD додирују страницу BD у истој тачки.

Задатак 1.51. Ако је полигон $A_1A_2\dots A_n$ прост са парним бројем тачака чије странице додирују круг k са центром у тачки S тј. круг k је уписан у полигон, доказати да је:

- (а) $A_1A_2 + A_3A_4 + \dots + A_{n-1}A_n = A_2A_3 + A_4A_5 + \dots + A_nA_1$,
 (б) $\angle A_1SA_2 + \angle A_3SA_4 + \dots + \angle A_{n-1}SA_n$
 $= \angle A_2SA_3 + \angle A_4SA_5 + \dots + \angle A_{n-2}SA_{n-1} + \angle A_nSA_1$.



Слика 1.38.

Решење: Нека су $P_1, P_2, \dots, P_n$ додирне тачке круга k редом са страницама $AA_1, A_1A_2, \dots, A_nA_1$, S центар круга k и нека при томе важи распоред тачака $\mathcal{B}(A_1, P_1, A_2), \mathcal{B}(A_2, P_2, A_3), \dots, \mathcal{B}(A_n, P_n, A_1)$ (Слика 1.38).

(а) Користећи једнакост тангентних дужи добијамо

$$\begin{aligned} A_1A_2 + A_3A_4 + \dots + A_{n-1}A_n \\ &= A_1P_1 + P_1A_2 + A_3P_3 + P_3A_4 + \dots + A_{n-1}P_{n-1} + P_{n-1}A_n \\ &= A_1P_n + A_2P_2 + A_3P_3 + \dots + A_nP_n \\ &= A_2A_3 + A_4A_5 + \dots + A_nA_1. \end{aligned}$$

(б) Према трећем ставу о подударности троуглова, важи: $\triangle SA_1P_1 \cong \triangle SA_1P_n$, $\triangle SA_2P_1 \cong \triangle SA_2P_2$, $\triangle SA_3P_2 \cong \triangle SA_3P_3$, $\dots$, $\triangle SA_nP_{n-1} \cong \triangle SA_nP_n$. Из њихове подударност следи једнакост одговарајућих углова и то: $\angle A_1SP_1 = \angle A_1SP_n$, $\angle A_2SP_1 = \angle A_2SP_2$, $\angle A_3SP_2 = \angle A_3SP_3$, $\dots$, $\angle A_nSP_{n-1} = \angle A_nSP_n$. С обзиром да P_1 припада дужи A_1A_2 то полуправа SP_1 припада углу $\angle A_1SA_2$ и разлаже га на углове $\angle A_1SP_1$ и $\angle P_1SA_2$, тј.

$$\angle A_1SA_2 = \angle A_1SP_1 + \angle P_1SA_2.$$

На исти начин, тачке $P_2, P_3, \dots, P_n$ су редом на страницама $A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$, па су и у угловима $\angle A_2SA_3, \angle A_3SA_4, \dots, \angle A_nSA_1$ и разлажу поменуто углове на одговарајуће делове. Сада имамо да је:

$$\begin{aligned} \angle A_1SA_2 + \angle A_3SA_4 + \dots + \angle A_{n-1}SA_n \\ &= \angle A_1SP_1 + \angle P_1SA_2 + \angle A_3SP_3 + \dots + \angle A_{n-1}SP_{n-1} + \angle P_{n-1}SA_n \\ &= \angle A_1SP_n + \angle A_2SP_2 + \angle A_3SP_3 + \dots + \angle A_{n-1}SP_{n-2} + \angle A_nSP_n \\ &= \angle A_2SA_3 + \angle A_4SA_5 + \dots + \angle A_nSA_1. \end{aligned}$$

□